ACADEMIA DE CIENCIAS DE MORELOS, A.C.

La Ciencia, desde Morelos para el mundo

W. Luis Mochán
Instituto de Ciencias Físicas, UNAM Campus Morelos
Miembro de la Academia de Ciencias de Morelos A. C.

Matemáticas Electorales

La siguiente carta fue interceptada por nuestro servicio de detectives. La publicamos en este medio para advertir a los lectores sobre su contenido y significado. Sin embargo, para proteger la privacía de los involucrados, se han eliminado sus nombres verdaderos, el puesto al que aspiran y el municipio donde se llevó a cabo el estudio que sigue. Se recomienda que el lector haga sus propias cuentas para verificar la exactitud del análisis de los resultados.

Lic. Eudoxio Encues Tabas
Investigación de Mercados y
Sondeos de Opinión

Lic. Godofredo Conta Bais
Presidente
Instituto Electoral de San Indalecio de Arriba

Distinguido Lic. Conta Bais,
De acuerdo a sus precisas instrucciones hemos realizado un sondeo de opinión entre los habitantes de San Indalecio de Arriba en cuanto a los candidatos a ocupar el puesto de burgomaestre. Ponemos a su apreciable consideración los resultados, resumidos en la siguiente tabla.

Preferencias electorales de los habitantes de...

A	B	C	D	Primera Opción
D	D	B	C	Segunda Opción
C	C	D	B	Tercera Opción
B	A	A	A	Cuarta Opción
48%	24%	20%	8%	Porcentaje

Permítame explicarle primero el significado de la tabla: la primera columna de la tabla muestra que 48% de los electores prefieren al candidato A sobre el candidato D, a D sobre C y a C sobre B. Similarmente, la segunda columna muestra que el 24% del electorado prefiere a B sobre todos los demás, pero de no estar B preferirían a D y si ambos faltaran preferirían a C, mientras que su última opción sería A. Las demás columnas han de leerse de manera similar.
En base a los resultados anteriores, le recomendamos que
1. Lleve a cabo una votación sencilla para que gane A con 48% de los votos, seguido por B con el 24%, C con el 20% y finalmente D con el 8%.
2. Lleve a cabo una elección a dos vueltas, eliminando en la primera a C y a D. De acuerdo a la tercera columna de nuestra tabla, los votos que hubiese ganado C en la primera vuelta serían transferidos a B en la segunda. Análogamente, de acuerdo a la cuarta columna, los que hubiese ganado D en la primera vuelta, no pudiendo serle transferidos a C quién estaría eliminado, también serían transferidos a B, quien ganaría con 24%+20%+8%=52% de los votos contra 48% para A.
3. Realice un procedimiento eliminatorio a tres rondas, en que primero elimine a D por obtener sólo el 8% de la primera votación, transfiriendo sus votos a C quien quedaría con 20%+8%=28% de los votos para la segunda ronda. En ésta, se eliminaría a B quien sólo tendría 24% de los votos contra 48% para A y 28% para C. De acuerdo a nuestra tabla, en la votación final entre A y C, A sólo sería el favorito del 48% de los electores, mientras que todos los demás preferirían a cualquier candidato sobre A, por lo cual C ganaría con 52% de los votos.
4. Realice una votación ponderada en que cada elector otorgue 3 puntos a su candidato favorito, 2 puntos a su segunda opción, 1 punto a su tercera opción y ningún punto a su cuarta opción. En este caso ganaría D con (2x48%+2x24%+1x20%+3x8%)/(3+2+1+0)=(188/6)%=31.3% de los puntos, mientras que C obtendría segundo lugar con (1x48%+1x24%+3x20%+2x8%)/6=24.7%, A tercer lugar con (3x48%+0x24%+0x20%+0x8%)/6=24%, y B quedaría en último lugar con (0x48%+3x24%+2x20%+1x8%)/6=20% de los puntos.
Aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo y me despido de Ud. con el deseo de que el análisis anterior le sea útil para elegir **democráticamente** al candidato que Ud. considere idóneo.

Atentamente,
(Firma ilegible)
Lic. Eudoxio Encues Tabas

Nota: Antes de discutirla, tengo que confesar que la carta mostrada arriba es totalmente **APÓCRIFA**, *inventada, producto de la imaginación. Sin embargo, tablas de preferencias análogas a la descrita arriba sí podrían existir en la práctica y no deben considerarse como excepcionales; el resultado de muchas elecciones sí dependería del método empleado para designar al ganador.*

Dada la tabla de preferencias ¿podría Ud. decir cuál de los cuatro candidatos A, B, C o D debería ganar en unas elecciones REALMENTE democráticas, dadas las preferencias de la población resumidas en la tabla? La absurda situación descrita en la carta anterior es sólo un ejemplo de lo complicado que puede ser definir la preferencia de una sociedad a partir de las preferencias de sus miembros. Si, por ejemplo, alguien argumentara que en una votación representativa A debe ganar pues tiene más adeptos que los demás, como muestra la primera columna de la tabla, alguien más podría contra-argumentar que A debe perder pues la mayor parte de la gente lo detesta, como muestra el cuarto renglón. ¿Cuál de los dos tiene razón? ¿Cuál de los dos tiene MÁS razón? ¿Tiene sentido la pregunta?
Los cuatro sistemas de votación considerados arriba: votación simple, votación a dos vueltas, eliminatorias y votación ponderada, son sistemas en uso común para tomar decisiones colectivas a partir de las preferencias individuales. Lo sorprendente es que cuatro sistemas aparentemente inofensivos, todos ellos de uso común, arrojen cuatro resultados totalmente distintos cuando se emplean en el mismo grupo de personas. Para cada candidato existe un método de elección que le da el triunfo **democráticamente.** *TODOS* los sistemas de elección adolecen de una u otra falla y nos llevan a resultados sorpresivos cuando son empleados en ciertas condiciones específicas.
Considere otro ejemplo sencillo: tres amigos, Ambrosio, Baldomero y Calixto se reunen a cenar y quieren decidir a donde ir: a la *TAQUERÍA*, la *POZOLERÍA* o la *TORTERÍA*. A Ambrosio le gustan más los tacos que el pozole y prefiere el pozole a las tortas, mientras que Baldomero prefiere el pozole a las tortas y éstas a los tacos y Calixto prefiere tortas a tacos a pozole. ¿A qué restaurante deben ir? Se detienen frente a la taquería, pero deciden no entrar pues tanto a Baldomero como a Calixto les gustan más las tortas que los tacos. Se dirigen entonces a la tortería, pero al llegar se arrepienten, pues tanto Ambrosio como Baldomero prefieren pozole en lugar de tortas. En la entrada de la pozolería Calixto y Ambrosio protestan, pues ambos preferirían cenar tacos que cenar pozole. Ante cualquier

opción, la mayoría tiene otra opción que considera mejor. Siendo así, parece que nuestros amigos tendrán que quedarse con hambre, a menos que Ud. encuentre una solución a su dilema.

Los ejemplos anteriores ilustran los profundos problemas a que se enfrentan los sistemas electorales, algunos de los cuales han sido capturados en un resultado matemático conocido como el *TEOREMA DE IMPOSIBILIDAD DE ARROW*, introducido por el economista Kenneth J. Arrow. Considere una elección de la cual resulte una lista de las preferencias de una sociedad, determinada a partir de las preferencias individuales de sus miembros. Piense Ud. en qué requisitos debería tener dicha elección para poder ser considerada ideal. Entre otras condiciones, estará Ud. de acuerdo en que se deberían cumplir las siguientes:

1. Que no haya un dictador, es decir, que no sea un sólo elector quien decida el resultado de la elección sin tomar en cuenta las preferencias de los demás electores.
2. Que si TODOS los electores prefirieran cierta alternativa sobre cierta otra, digamos, a A sobre B, en el resultado final A quede por arriba de B.
3. Que si el resultado de cierta elección otorgara a A un mejor lugar que a B, este resultado no se vea modificado si algún elector cambia su opinión sobre un tercer candidato C pero sin modificar su preferencia relativa entre A y B. Por ejemplo, si inicialmente un elector prefiriera a A sobre B y a B sobre C, el favorito de la sociedad entre A y B no debería cambiar si dicho elector modificara su preferencia y decidiera que A es mejor que C y que C supera a B o si decidiera que C es mejor que A pero A sigue siendo mejor que B. El resultado relativo entre dos candidatos no debe depender de las opiniones sobre un tercer candidato; el resultado debe ser independiente de alternativas irrelevantes. (Si parece trabalenguas, lea este párrafo de nuevo, más despacio).

El teorema de Arrow establece que *NO EXISTE NINGÚN MECANISMO DE ELECCIÓN ENTRE TRES O MÁS CANDIDATOS QUE CUMPLA CON TODOS LOS CRITERIOS ENUNCIADOS ARRIBA.* La demostración de este teorema es muy sencilla, ingeniosa y bonita, y no requiere de conocimientos matemáticos previos, pero es demasiado larga como para presentarla en este artículo.

Quiero enfatizar que el resultado anterior es un *TEOREMA MATEMÁTICO.* El resultado de Arrow no nos enseña que hemos sido incapaces de encontrar un mecanismo idóneo, justo y objetivo para que la sociedad tome decisiones considerando las preferencias de todos sus miembros en toda circunstancia y cumpliendo con las razonables condiciones enunciadas arriba; lo que nos dice es que es y será *IMPOSIBLE* hallar dicho mecanismo, sin importar cuánto nos esforcemos en buscarlo. Lo anterior se puede resumir en pocas palabras, *NO PUEDE HABER UNA DEMOCRACIA PERFECTA*.

Si bien las matemáticas nos aseguran que no hay un sistema ideal, ellas mismas pueden ayudarnos a evaluar diversos sistemas electorales para desechar los peores y establecer los mejores, o aunque sea, los menos malos. Las matemáticas también nos permiten estudiar las propiedades estadísticas de los resultados y la confiabilidad de los mismos y nos enseñan a cuantificar sus márgenes de incertidumbre. El teorema de Arrow y la consecuente imposibilidad de la perfección no nos debe volver complacientes frente a las múltiples deficiencias de nuestro sistema político.

Para actividades recientes de la Academia y artículos anteriores puede consultar: www.acmor.org.mx