Efectos No Locales en la Fuerza de Casimir

Ana María Contreras Reyes[1],

Carlos Villarreal[2],

Raul Esquivel[2]

Catalina López Bastidas[3]

W. Luis Mochán[1]

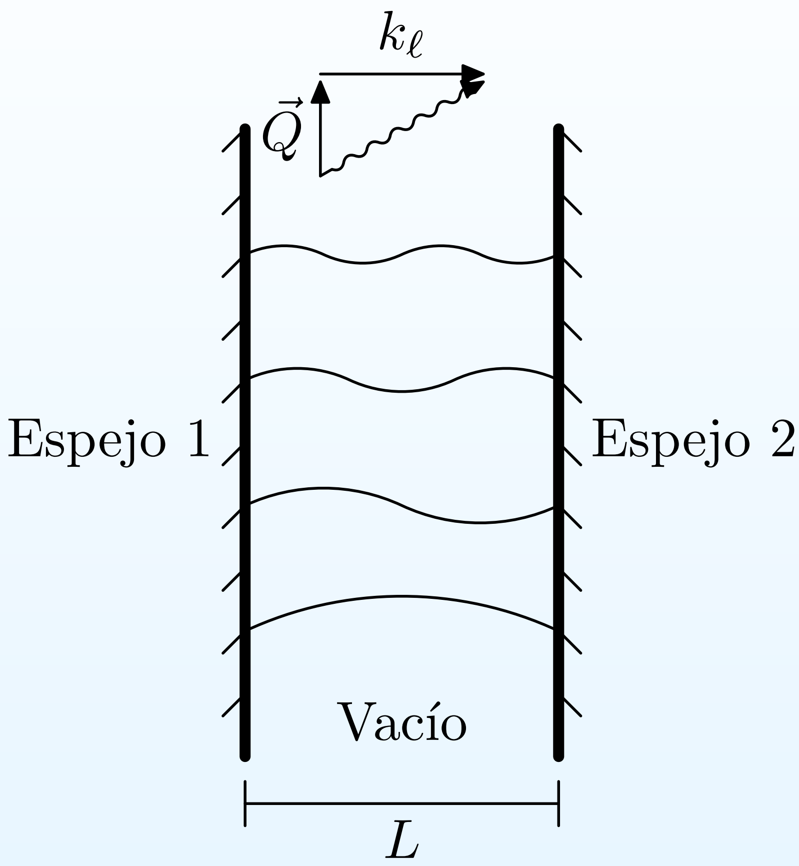
mochan@fis.unam.mx

[1]Centro de Ciencias Físicas, UNAM

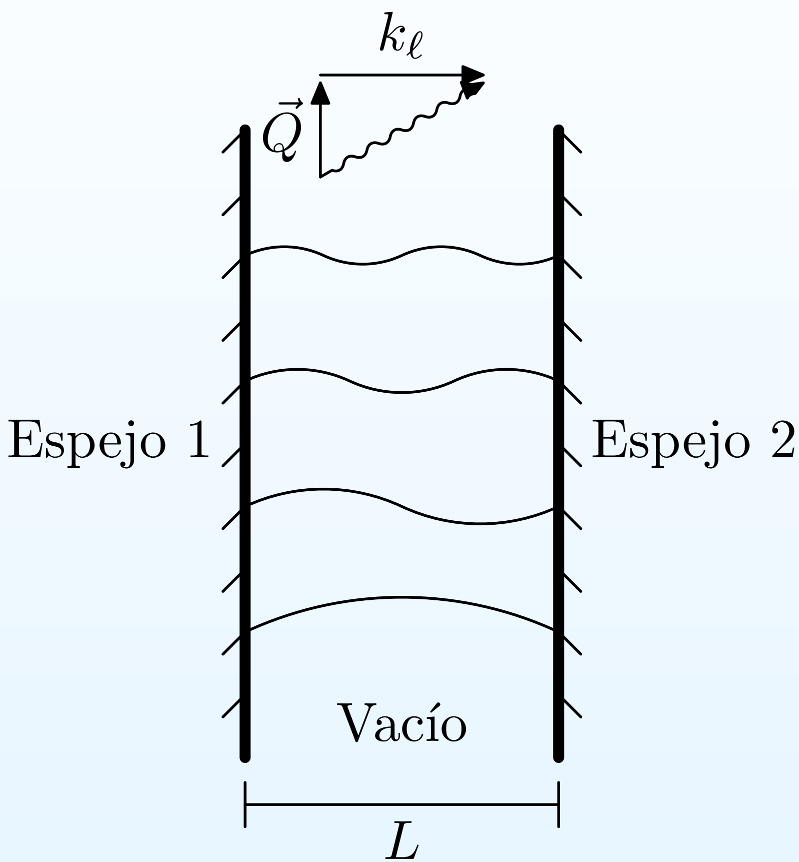
[2]Instituto de Física, UNAM

[3]Centro de Estudios de la Materia Condensada, UNAM

Fluctuaciones Cuánticas del Vacío



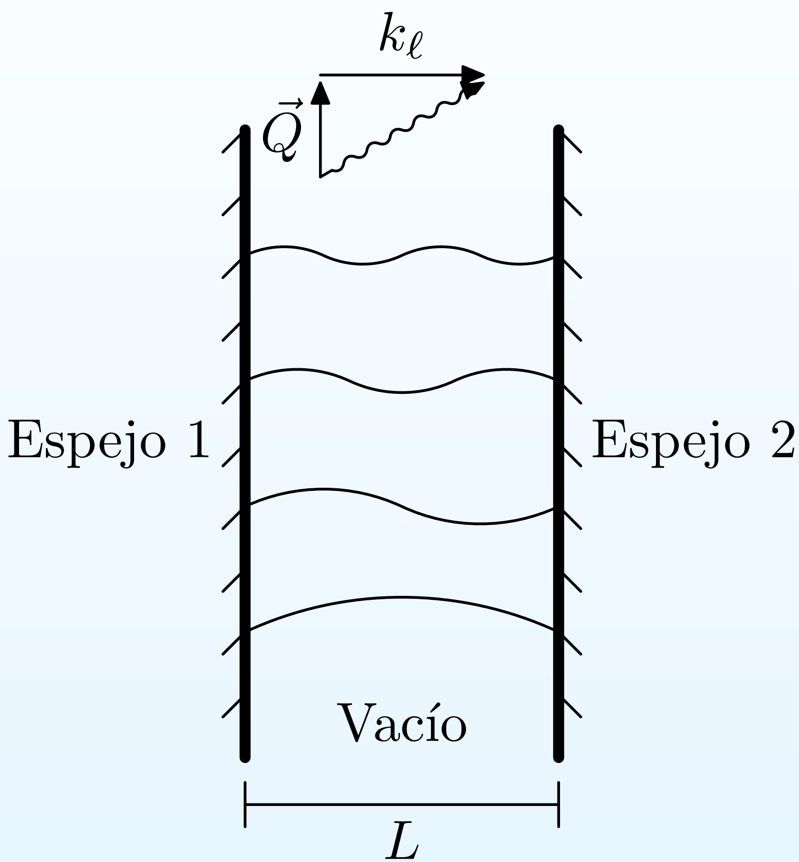
Fluctuaciones Cuánticas del Vacío



- Primera Cuantización:

$$k_\ell = \ell\pi/L$$

Fluctuaciones Cuánticas del Vacío



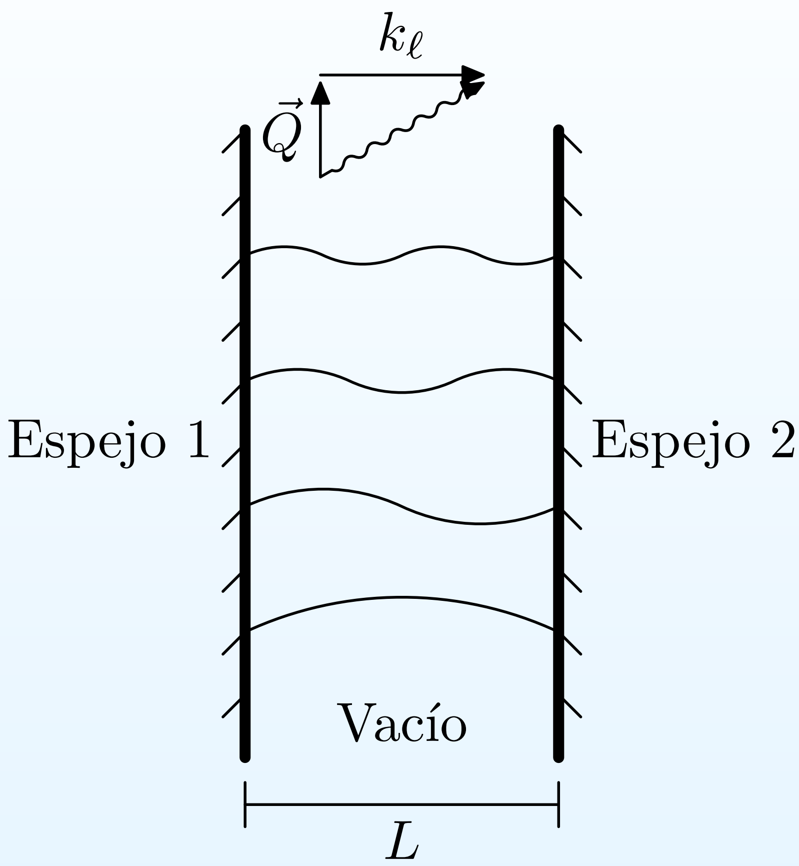
- Primera Cuantización:

$$k_\ell = \ell\pi/L$$

- Ec. de onda $\Rightarrow$ oscilador armónico:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_{k_\ell} &= c^2\nabla^2\phi_{k_\ell} \\ &= -k_\ell^2 c^2 \phi_{k_\ell}\end{aligned}$$

Fluctuaciones Cuánticas del Vacío



- Primera Cuantización:

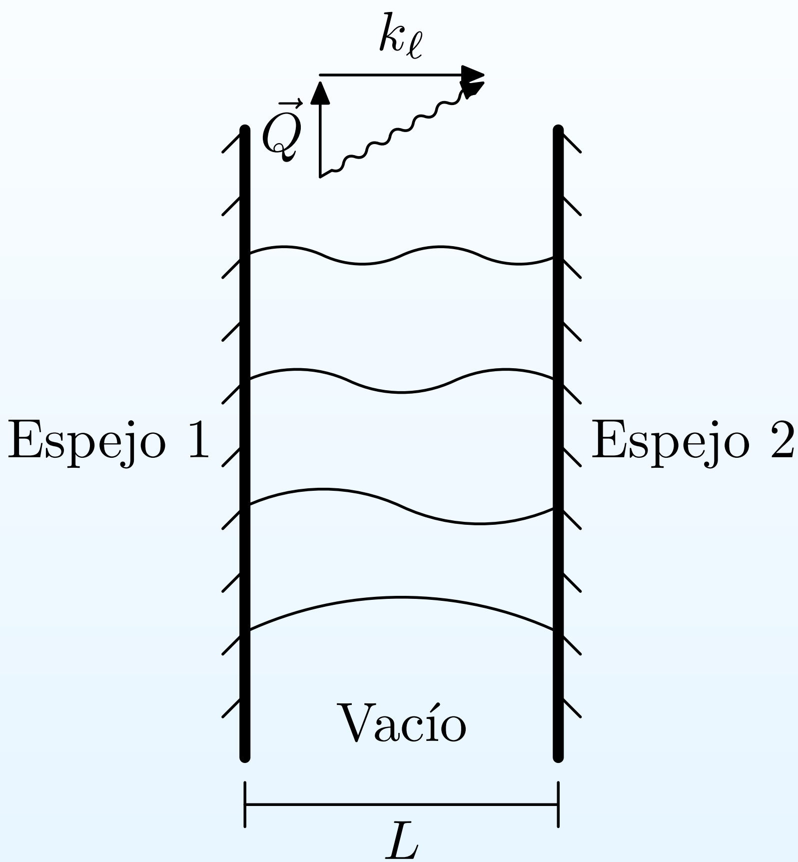
$$k_\ell = \ell\pi/L$$

- Ec. de onda $\Rightarrow$ oscilador armónico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_{k_\ell} &= c^2\nabla^2\phi_{k_\ell} \\ &= -k_\ell^2 c^2 \phi_{k_\ell} \end{aligned}$$

- $\omega_\ell = k_\ell c = \ell\pi c/L$

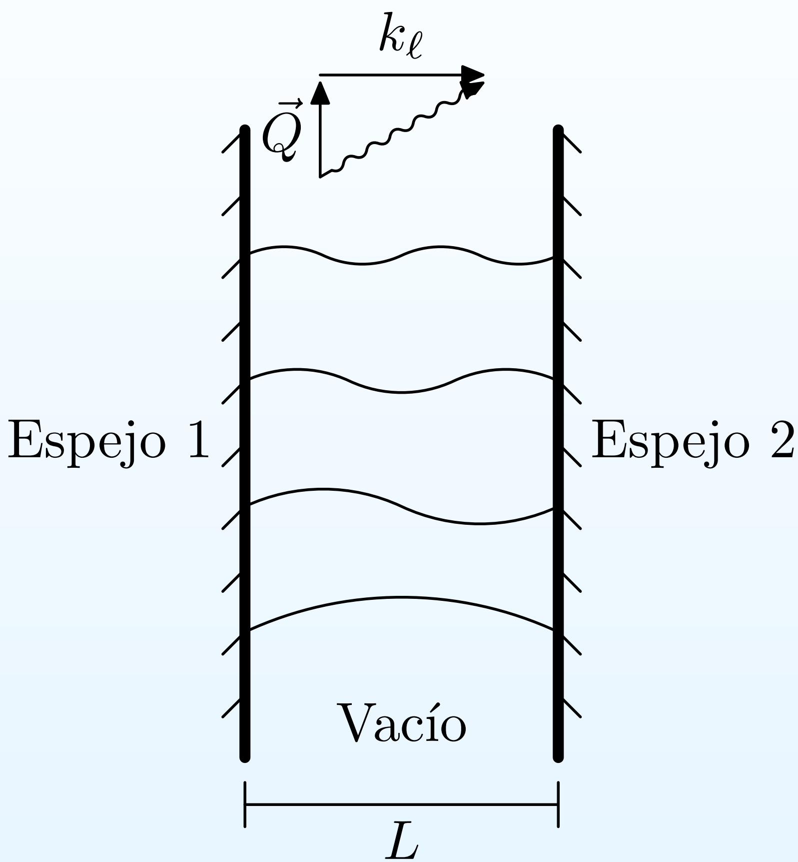
Fluctuaciones Cuánticas del Vacío



- Segunda Cuantización:

$$\begin{aligned} E_{n_\ell} &= \left(n_\ell + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_\ell \\ &= \frac{\pi\hbar c}{L}\left(n_\ell + \frac{1}{2}\right)\ell \end{aligned}$$

Fluctuaciones Cuánticas del Vacío



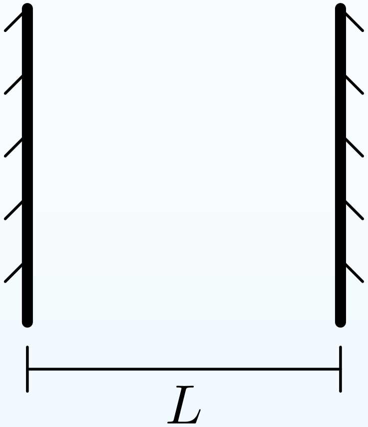
- Segunda Cuantización:

$$
\begin{aligned}
E_{n_\ell} &= \left(n_\ell + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_\ell \\
&= \frac{\pi\hbar c}{L}\left(n_\ell + \frac{1}{2}\right)\ell
\end{aligned}
$$

- Energía del Vacío:

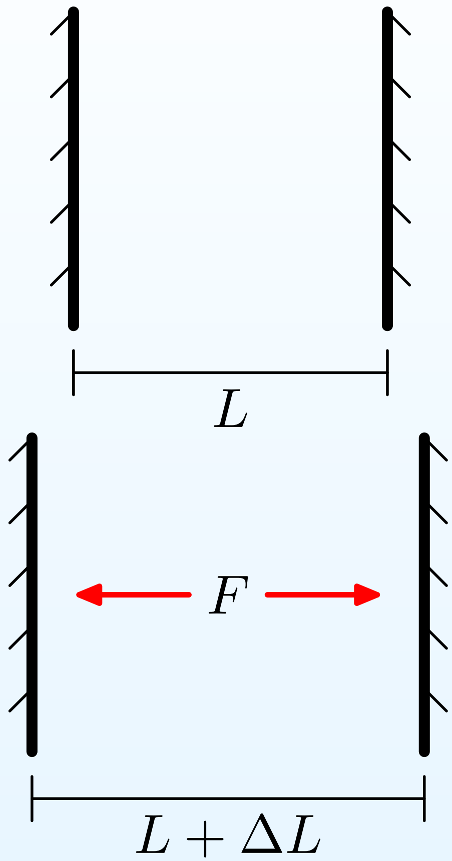
$$
\begin{aligned}
U(L) &= \sum E_{n_\ell} \\
&= \frac{\pi\hbar c}{L}\sum\left(n_\ell + \frac{1}{2}\right)\ell
\end{aligned}
$$

Fuerza de Casimir



$U(L)$

Fuerza de Casimir



$$U(L)$$

$$U(L + \Delta L) = U(L) - F(L)\Delta L$$

Problema

$U(L)$ diverge aún a $T = 0$ (*catástrofe ultravioleta*),

$$U(L) = \frac{\pi \hbar c}{2L} \sum \ell.$$

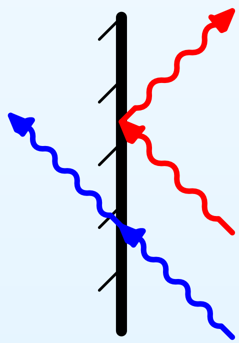
Problema

$U(L)$ diverge aún a $T = 0$ (*catástrofe ultravioleta*),

$$U(L) = \frac{\pi\hbar c}{2L} \sum \ell.$$

Discusión:

- ¿Espejo perfecto?
- Frecuencia de corte



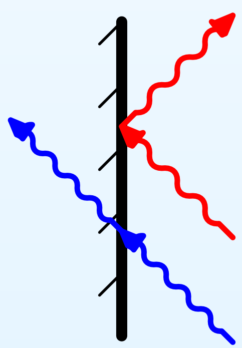
Problema

$U(L)$ diverge aún a $T = 0$ (*catástrofe ultravioleta*),

$$U(L) = \frac{\pi\hbar c}{2L} \sum \ell.$$

Discusión:

- ¿Espejo perfecto?
- Frecuencia de corte



Regularización: *zeta* de Riemann

- $\sum_\ell \ell^s = \zeta(-s)$ si $s < -1$.
- $U_s(L) = \dfrac{\pi\hbar c}{2L} \sum l^s$

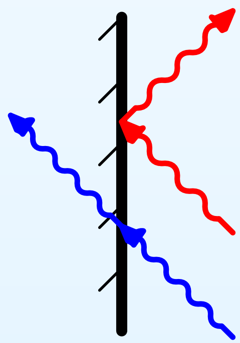
Problema

$U(L)$ diverge aún a $T = 0$ (*catástrofe ultravioleta*),

$$U(L) = \frac{\pi\hbar c}{2L} \sum \ell.$$

Discusión:

- ¿Espejo perfecto?
- Frecuencia de corte



Regularización: *zeta* de Riemann

- $\sum_\ell \ell^s = \zeta(-s)$ si $s < -1$.
- $U_s(L) = \frac{\pi\hbar c}{2L} \sum l^s$

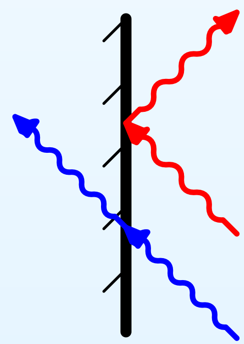
Problema

$U(L)$ diverge aún a $T=0$ (*catástrofe ultravioleta*),

$$U(L) = \frac{\pi \hbar c}{2L} \sum \ell.$$

Discusión:

- ¿Espejo perfecto?
- Frecuencia de corte



Regularización: *zeta* de Riemann

- $\sum_\ell \ell^s = \zeta(-s)$ si $s < -1$.
- $U_s(L) = \dfrac{\pi \hbar c}{2L} \sum l^s$

$$\begin{aligned} U(L) &= \infty + \lim_{s \to -1} U_s(L) \\ &= \infty + \frac{\pi \hbar c}{2L} \zeta(-1) \end{aligned}$$

Efecto Casimir

- $U(L) = \infty - \dfrac{\pi \hbar c}{24 L},$

Efecto Casimir

- $U(L) = \infty - \dfrac{\pi\hbar c}{24L},$
- $F(L) = -\dfrac{dU(L)}{dL} = -\dfrac{\pi\hbar c}{24L^2},$

Efecto Casimir

- $U(L) = \infty - \dfrac{\pi\hbar c}{24L},$
- $F(L) = -\dfrac{dU(L)}{dL} = -\dfrac{\pi\hbar c}{24L^2},$
- Las fluctuaciones cuánticas del campo electromagnético se pueden manifestar mediante una fuerza atractiva entre superficies cercanas.

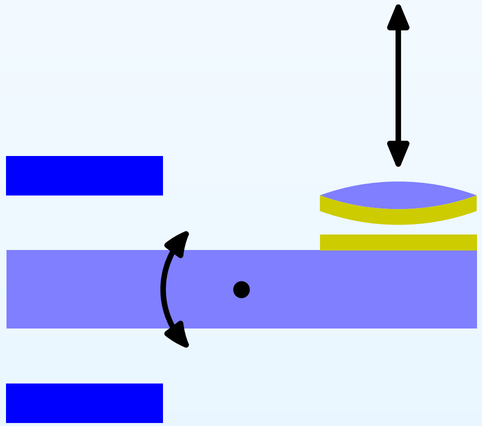
Efecto Casimir

- $U(L) = \infty - \dfrac{\pi\hbar c}{24L},$
- $F(L) = -\dfrac{dU(L)}{dL} = -\dfrac{\pi\hbar c}{24L^2},$
- Las fluctuaciones cuánticas del campo electromagnético se pueden manifestar mediante una fuerza atractiva entre superficies cercanas.
- En 3D+y con 2 polarizaciones (TE y TM):

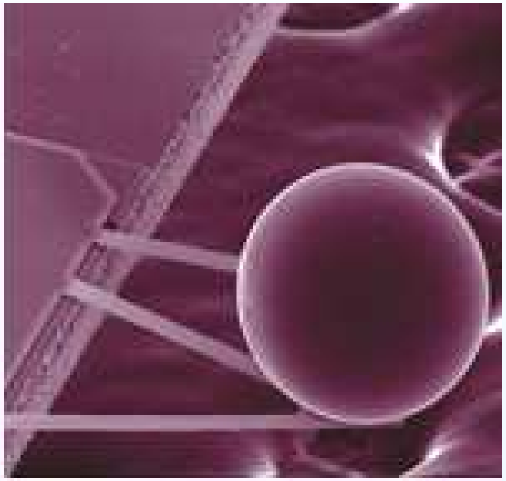
$$F(L) = -\frac{\pi^2\hbar c\mathcal{A}}{240L^4}.$$

Resurgimiento

- Casimir la obtuvo *desde 1948*.
- Sparnay la confirmó en 1958 *con incertidumbre de 100 %*.
- Lamoreaux la volvió a medir en 1997 con un péndulo de torsión con incertidumbre de 5 % y $L \sim 600$nm.



Resurgimiento

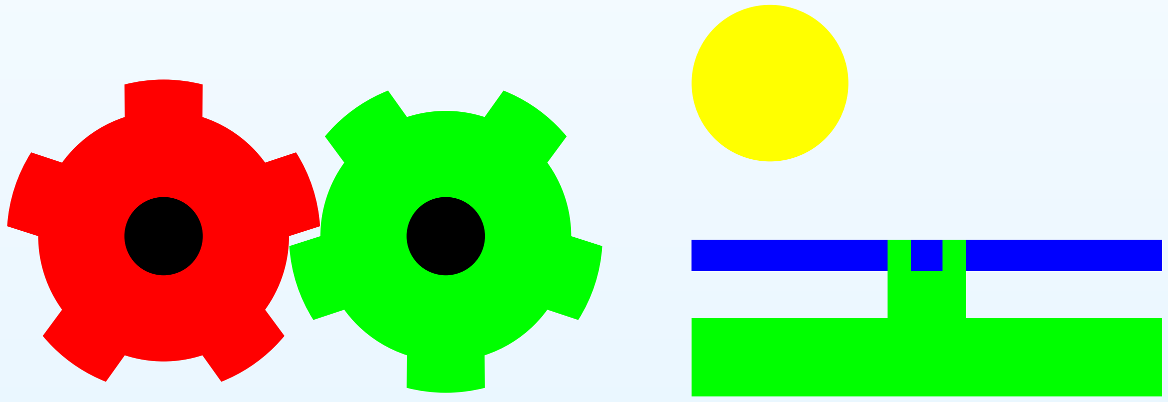


(Mohideen)

- Se ha medido la fuerza con AFM's hasta $L \sim 100$nm con una precisión de $\sim 1\,\%$. Discrepancias pequeñas pero significativas.
- Manipulación de átomos mediante el campo de punto cero. . .
- Casimir y Cosmología: G depende (?) de la energía de las fluctuaciones de vacío. . .
- Viajes intergalácticos y ciencia ficción. . .

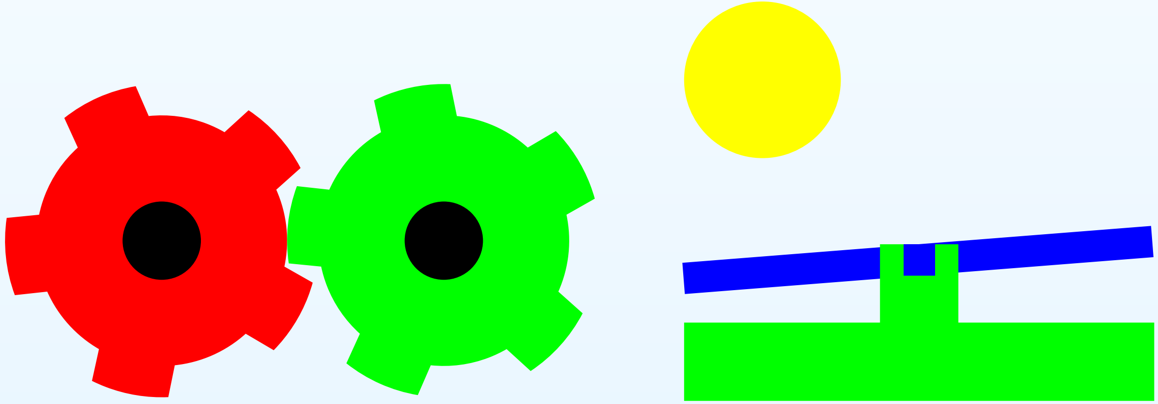
Nano Máquinas

- La fuerza de Casimir decae rápidamente con la distancia $\propto L^{-4}$, pero ¡a 10nm equivale a $\sim$1atm!, i.e., puede jugar un papel importante en dispositivos nanométricos.



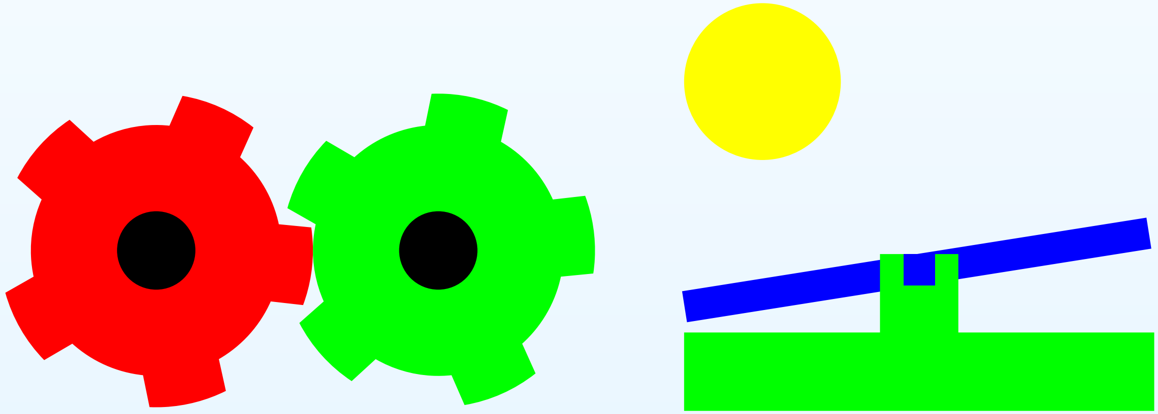
Nano Máquinas

- La fuerza de Casimir decae rápidamente con la distancia $\propto L^{-4}$, pero ¡a 10nm equivale a $\sim$1atm!, i.e., puede jugar un papel importante en dispositivos nanométricos.



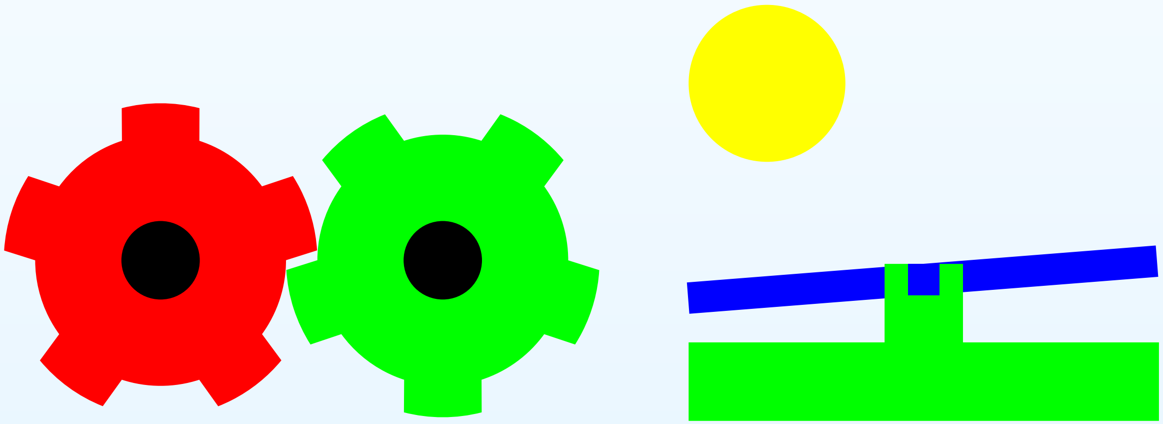
Nano Máquinas

- La fuerza de Casimir decae rápidamente con la distancia $\propto L^{-4}$, pero ¡a 10nm equivale a $\sim$1atm!, i.e., puede jugar un papel importante en dispositivos nanométricos.



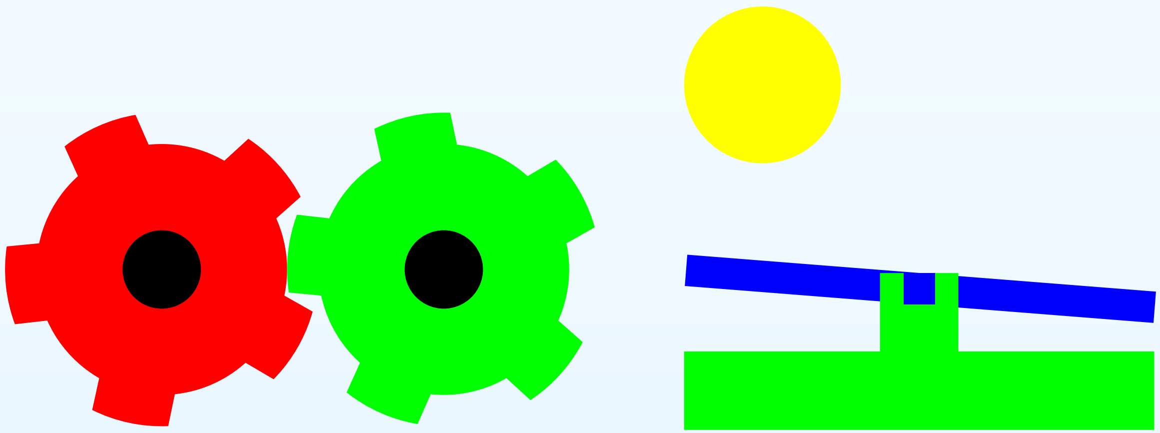
Nano Máquinas

- La fuerza de Casimir decae rápidamente con la distancia $\propto L^{-4}$, pero ¡a 10nm equivale a $\sim$1atm!, i.e., puede jugar un papel importante en dispositivos nanométricos.



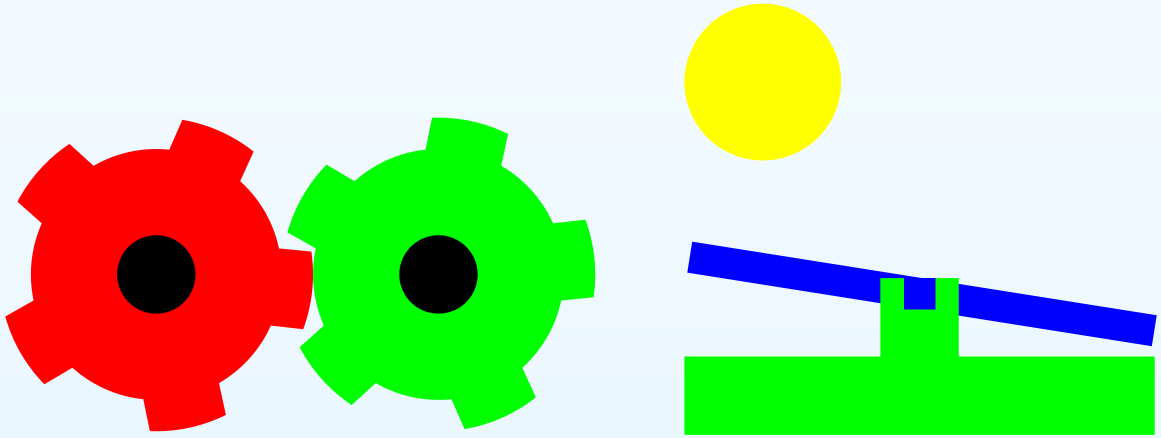
Nano Máquinas

- La fuerza de Casimir decae rápidamente con la distancia $\propto L^{-4}$, pero ¡a 10nm equivale a $\sim$1atm!, i.e., puede jugar un papel importante en dispositivos nanométricos.

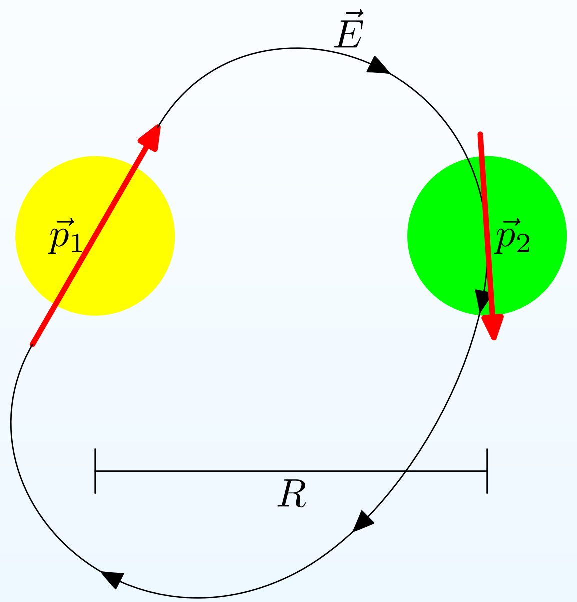


Nano Máquinas

- La fuerza de Casimir decae rápidamente con la distancia $\propto L^{-4}$, pero ¡a 10nm equivale a $\sim$1atm!, i.e., puede jugar un papel importante en dispositivos nanométricos.

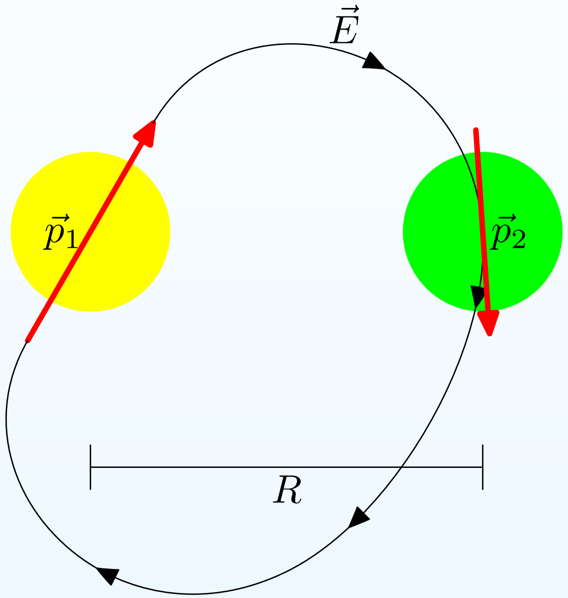


Materiales reales



- van der Waals:

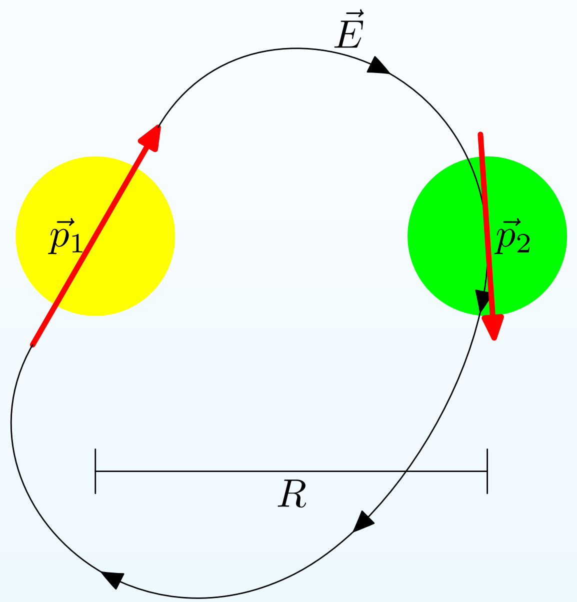
Materiales reales



- van der Waals:

p_1

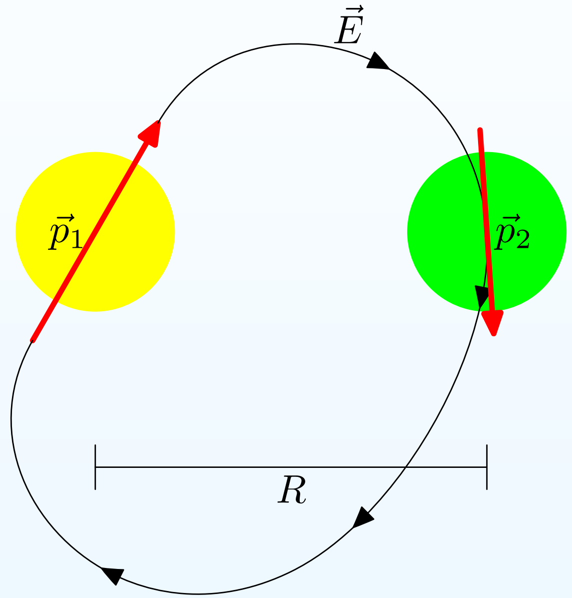
Materiales reales



- van der Waals:

$$p_1 \longrightarrow E_2 \propto p_1/R^3$$

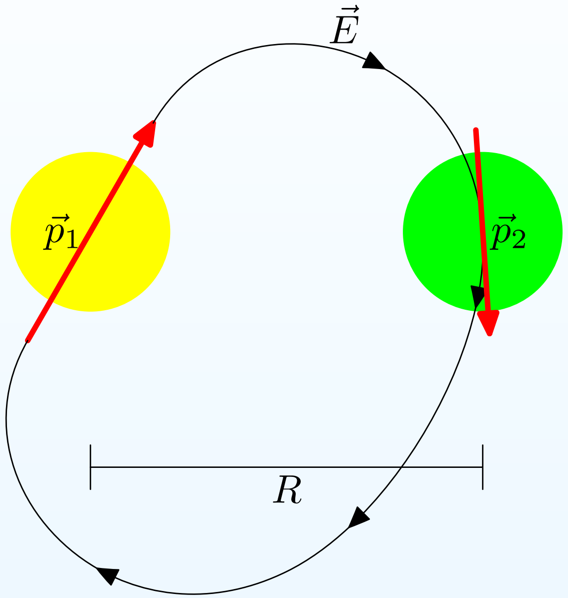
Materiales reales



- van der Waals:

$$p_1 \longrightarrow E_2 \propto p_1/R^3 \ \longrightarrow p_2 \propto \alpha_2 E_1$$

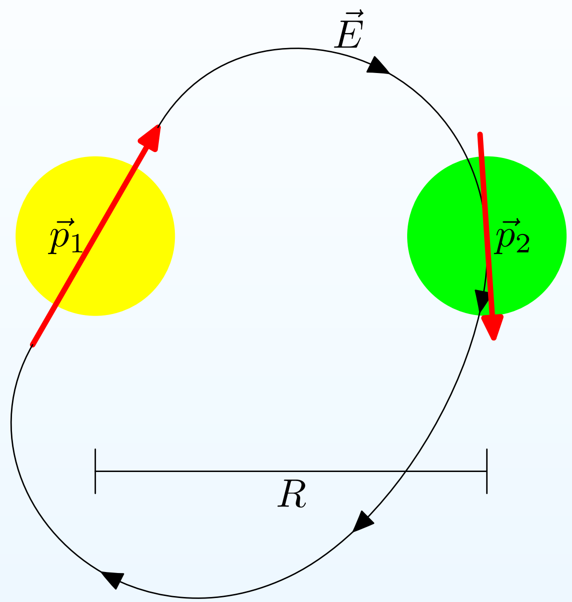
Materiales reales



- van der Waals:

$$p_1 \longrightarrow E_2 \propto p_1/R^3 \;\longrightarrow p_2 \propto \alpha_2 E_1 \;\longrightarrow E_1 \propto p_2/R^3$$

Materiales reales

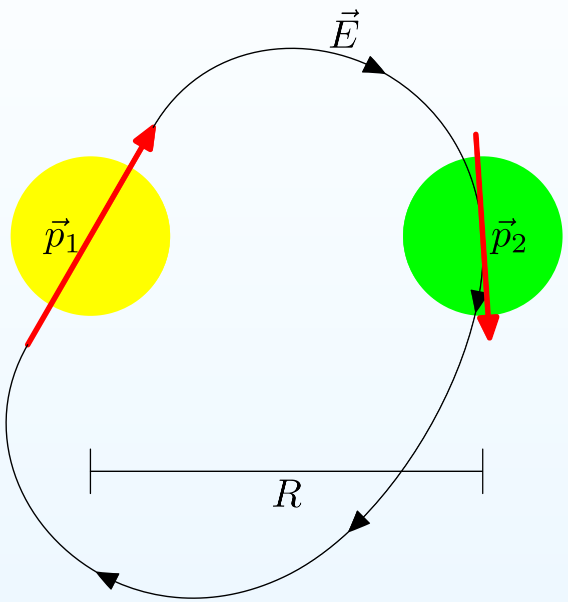


- van der Waals:

$$p_1 \longrightarrow E_2 \propto p_1/R^3 \; \longrightarrow p_2 \propto \alpha_2 E_1 \; \longrightarrow E_1 \propto p_2/R^3$$

$$\longrightarrow U = -\vec{E}_1 \cdot \vec{p}_1 \propto -\frac{\langle p_1^2 \rangle \alpha_2}{R^6}$$

Materiales reales

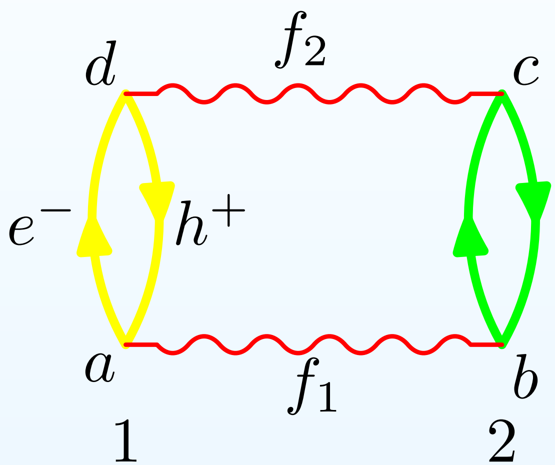


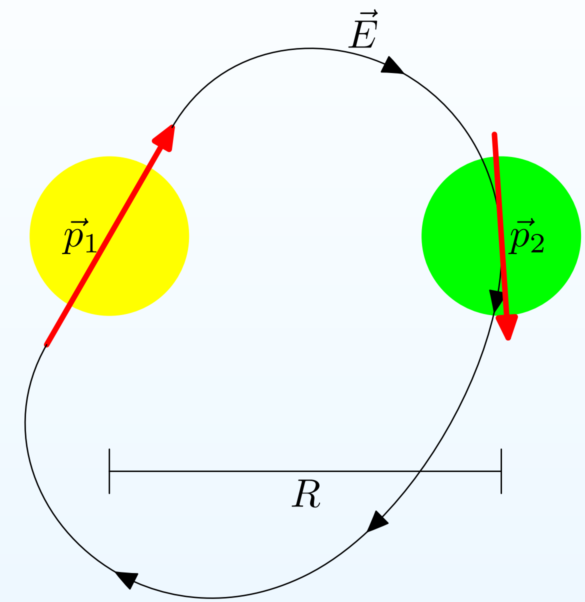
- van der Waals:

$$p_1 \longrightarrow E_2 \propto p_1/R^3 \; \longrightarrow p_2 \propto \alpha_2 E_1 \; \longrightarrow E_1 \propto p_2/R^3$$

$$\longrightarrow U = -\vec{E}_1 \cdot \vec{p}_1 \propto -\frac{\langle p_1^2 \rangle \alpha_2}{R^6} \; \longrightarrow -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{R^6}$$

Materiales reales





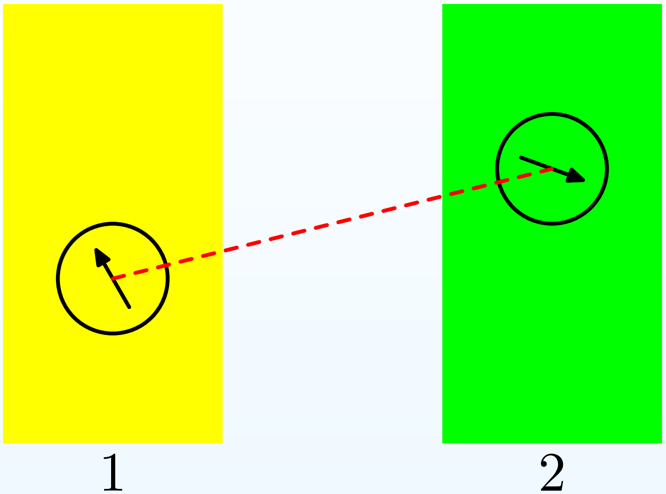
- van der Waals:

$$p_1 \longrightarrow E_2 \propto p_1/R^3 \;\longrightarrow p_2 \propto \alpha_2 E_1 \;\longrightarrow E_1 \propto p_2/R^3$$

$$\longrightarrow U = -\vec{E}_1 \cdot \vec{p}_1 \propto -\frac{\langle p_1^2 \rangle \alpha_2}{R^6} \;\longrightarrow -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{R^6}$$

$$U = -\frac{3\hbar}{\pi R^6} \int_0^\infty du\, \alpha_1(iu)\alpha_2(iu)$$

Superposición

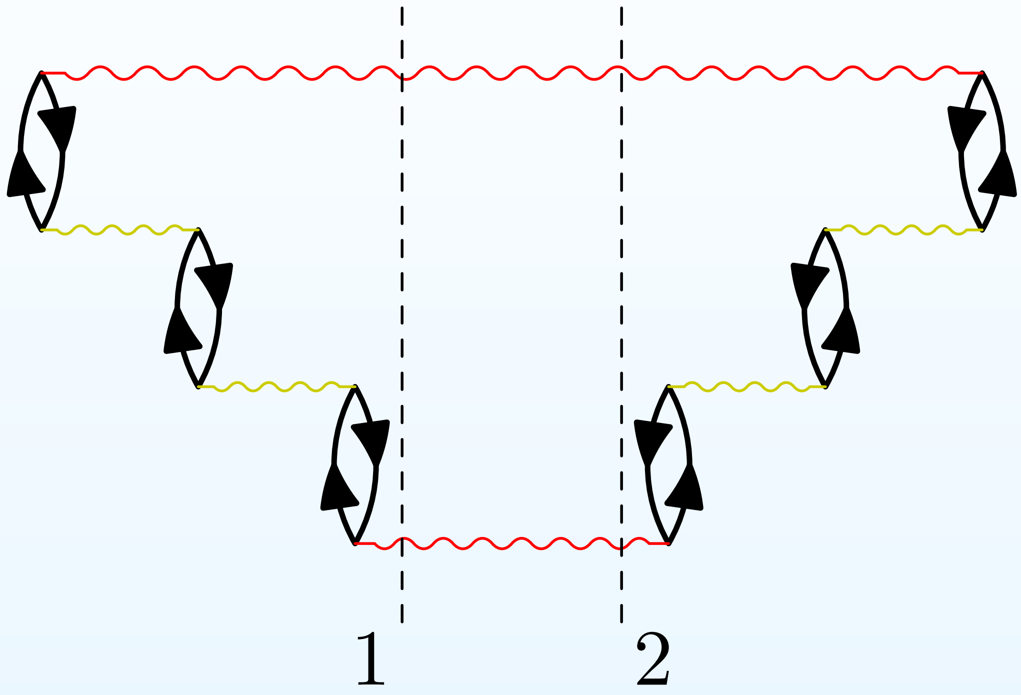


$$U = \sum_{ij} \vec{U}_{ij} \propto \int d^3r_1\, d^3r_2\, \frac{1}{R_{12}^6} \propto \frac{\mathcal{A}}{L^2}.$$

- $F \propto L^{-3}$
- Retardamiento: $R_{ij}^6 \to R_{ij}^7$, $F \to L^{-4}$
- ¿Aditividad?
- Geometría y fuerzas repulsivas.

Excitaciones del Sólido

$\ldots +$



$+ \ldots$

- Requiere especificar *todos* los diagramas y sumarlos, y para ello, un modelo microscópico del material.

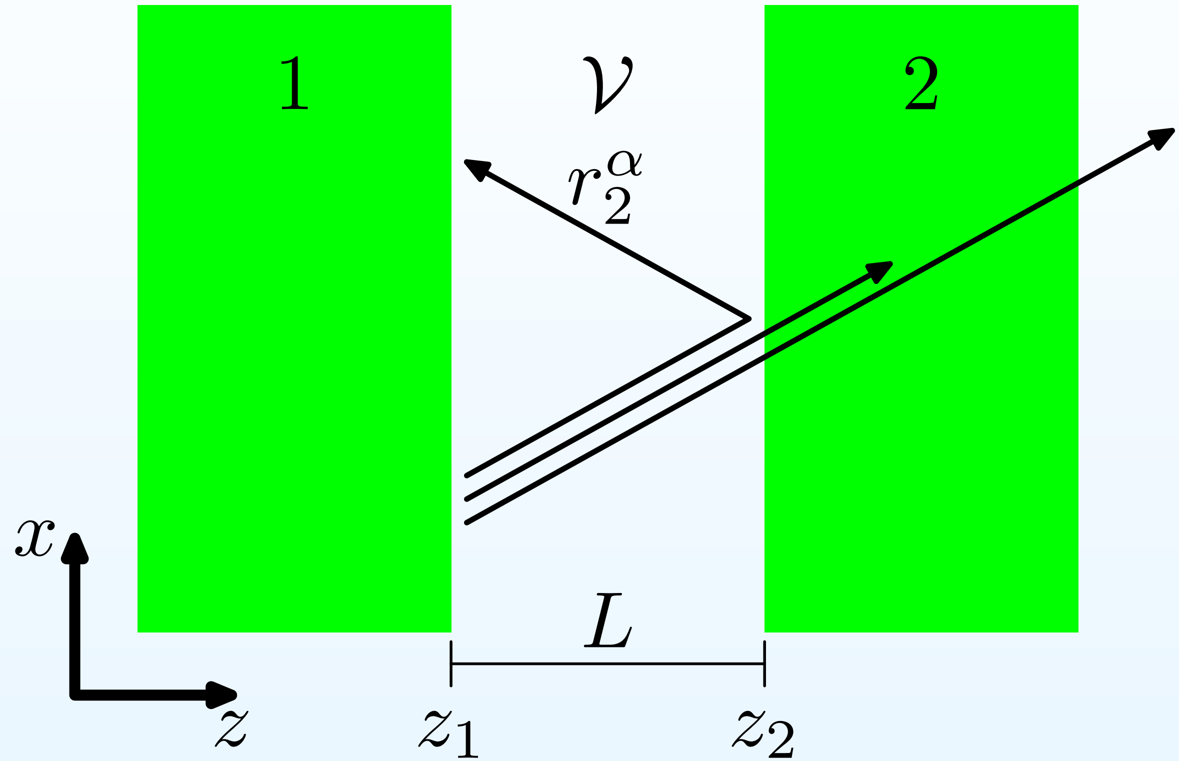
Fotones Vestidos

- $c \longrightarrow c/\sqrt{\epsilon}$
- $\epsilon = \epsilon(\omega) \longrightarrow \epsilon_a(\omega)$, $a =$ material o vacío.
- $\nabla^2 \vec{A} + \epsilon_a(\omega)\dfrac{\omega^2}{c^2}\vec{A} = 0$ + C.C. $\Rightarrow$ modos propios electromagnéticos $\Rightarrow$ energía y fuerza.

Fotones Vestidos

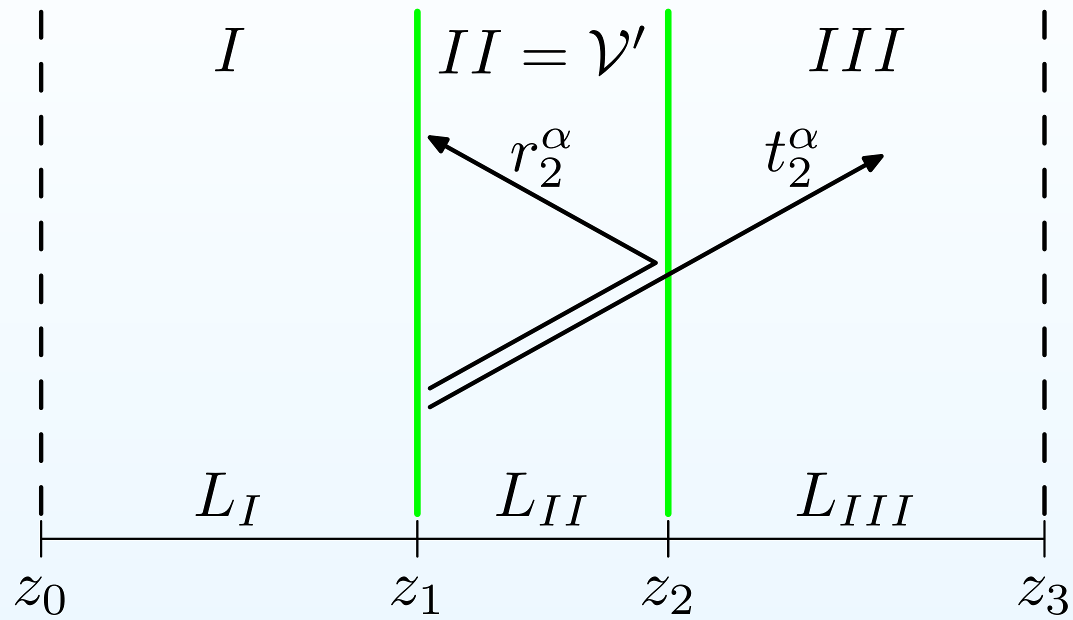
- $c \longrightarrow c/\sqrt{\epsilon}$
- $\epsilon = \epsilon(\omega) \longrightarrow \epsilon_a(\omega)$, $a =$ material o vacío.
- $\nabla^2 \vec{A} + \epsilon_a(\omega)\dfrac{\omega^2}{c^2}\vec{A} = 0$ + C.C. $\Rightarrow$ modos propios electromagnéticos $\Rightarrow$ energía y fuerza.
- $\epsilon_a(\omega)$ son complejas, i.e., hay dispersión y disipación. Los *modos* electromagnéticos no forman una *base* completa.
- Fuentes $\vec{j}(\vec{r}, t)$ fluctuantes. $\langle j_i \rangle = 0$, pero $\langle j_i j_j \rangle \neq 0$.
- Suposiciones ocultas: homogeneidad, isotropía, localidad. . .

Deducción General



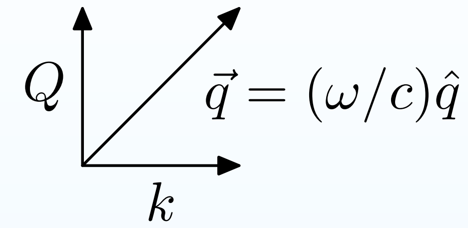
- Sistema real:
- Balance detallado: Amplitud coherente r_2^α. Emisión incoherente $1 - |r_2^\alpha|^2$. En la cavidad *¡todo depende exclusivamente de r_a^α!*

Sistema Ficticio



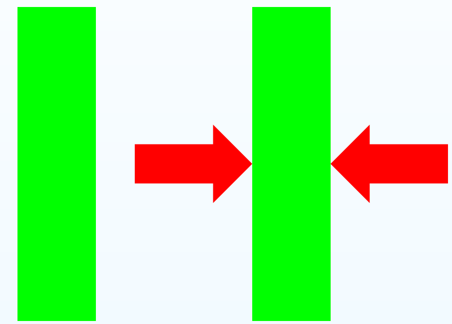
- r_a^α como en el sistema real,
- t_a^α para conservar energía. ¡No hay absorción!
- $L_{II} \ll L_I, L_{III} \to \infty$.
- Espejos perfectos en z_0, z_3 para cuantizar y contar modos. . . .

Modos EM



- Pol. s: $\vec{E} = (0, E_y(z), 0)e^{i(Qx-\omega t)}$.
- $\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\right) E_y = 0$, $k^2 = \omega^2/c^2 - Q^2$
  + C.C. en $z_1 = 0$, $z_2 = L$.
-
  $E_y^{>}(z) = e^{ik(z-L)} + r_2^s e^{-ik(z-L)}$ cumple la C.C. derecha,
  $E_y^{<}(z) = e^{-ikz} + r_1^s e^{ikz}$ cumple la C.C. izquierda.
- Función de Green *eléctrica*: $G^E_{k^2}(z,z') = \dfrac{E_y^{<}(z_<)E_y^{>}(z_>)}{W}$.
- Función de Green *magnética*: $E_y \to B_x$, $r_a^s \to -r_a^s$.
- Densidad local de estados:
  $$\rho^s_{k^2}(z) = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}[G^E_{\tilde{k}^2}(z,z) + G^B_{\tilde{k}^2}(z,z)] = \frac{1}{2\pi\tilde{k}}\mathrm{Re}\left(\frac{1 + r_1^s r_2^s e^{2i\tilde{k}L}}{1 - r_1^s r_2^s e^{2i\tilde{k}L}}\right).$$

Flujo de ímpetu



Para cada fotón:

- Impetu $p_z = \pm\hbar k$,
- velocidad $v_z = \pm ck/q$,
- flujo de ímpetu $-t_{zz} = +\hbar ck^2/q$,

Sumando $tzz\rho_{k^2}$ empleando $\sum_{k^2} \to \int kdk$, $\sum_{\vec{Q}} \to \mathcal{A}/(4\pi)\int QdQ$ y $\alpha = s, p$ obtenemos el tensor de esfuerzos T_{zz} dentro de la cavidad. Restando un término similar correpondiente al flujo *fuera* de la cavidad, obtenemos finalmente...

Fórmula de Lifshitz

$$\frac{F}{\mathcal{A}} = \frac{\hbar c}{2\pi^2} \int_0^\infty Q dQ \int_{q \geq 0} dk \, \frac{k^3}{q} f \, \mathrm{Re} \frac{1}{\tilde{k}} \left(\frac{1}{\xi^s - 1} + \frac{1}{\xi^p - 1} \right).$$

- $f = N + 1/2 =$ocupación del estado $\vec{Q}, k$,
- $\xi^\alpha = (r_1^\alpha r_2^\alpha e^{2i\hat{k}L})^{-1}$.

A diferencia de la deducción de Lifshitz y otras, no hicimos suposiciones sobre las placas 1 y 2 (salvo simetría en $x - y$); pueden ser semiinfinitas, finitas o delgadas; homogéneas o inhomogeneas, ordenadas o desordenadas, transparentes o disipativas, conductoras o aislantes, *locales o no locales*. . .

Dispersión Espacial

- $D = \epsilon E$

Dispersión Espacial

- $D = \epsilon E \longrightarrow D(\omega) = \epsilon(\omega) E(\omega)$

Dispersión Espacial

- $D = \epsilon E \longrightarrow D(\omega) = \epsilon(\omega)E(\omega)$
  $\longrightarrow$ dispersión *temporal* $D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \epsilon(t - t')E(t')$.
- El sistema tiene *inercia* y *tarda* en responder.

Dispersión Espacial

- $D = \epsilon E \rightarrow D(\omega) = \epsilon(\omega)E(\omega)$
  $\rightarrow$ dispersión *temporal* $D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \epsilon(t - t')E(t')$.
- El sistema tiene *inercia* y *tarda* en responder.
- Análogamente, la respuesta en $\vec{r}$ puede depender de la excitación en $\vec{r}' \neq \vec{r}$,

$$D_i(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt' \, \epsilon_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; t - t')E_j(\vec{r}', t').$$

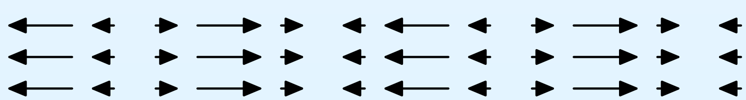
Dispersión Espacial

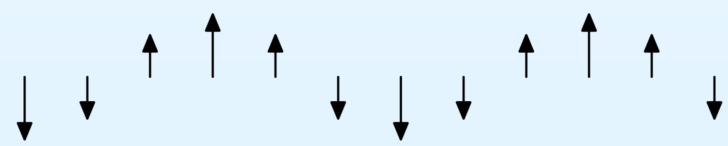
- $D = \epsilon E \longrightarrow D(\omega) = \epsilon(\omega) E(\omega)$
  $\longrightarrow$ dispersión *temporal* $D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \epsilon(t - t') E(t')$.
- El sistema tiene *inercia* y *tarda* en responder.
- Análogamente, la respuesta en $\vec{r}$ puede depender de la excitación en $\vec{r}' \neq \vec{r}$,

$$D_i(\vec{r}, t) = \int d^3 r' \int dt' \, \epsilon_{ij}(\vec{r}, \vec{r}'; t - t') E_j(\vec{r}', t').$$

- En un medio isotrópico y homogéneo,

$$\vec{D}^L(\vec{q}, \omega) = \epsilon^L(q, \omega) \vec{E}^L(\vec{q}, \omega), \qquad \vec{D}^T(\vec{q}, \omega) = \epsilon^T(q, \omega) \vec{E}^T(\vec{q}, \omega).$$



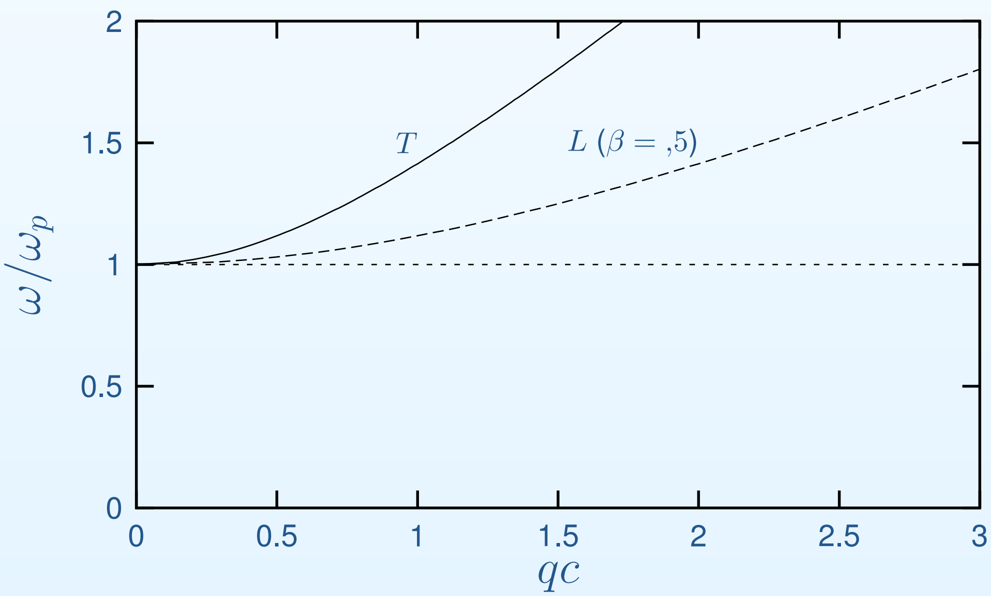


Modelo Hidrodinámico

- Onda longitudinal: $n \to n + \delta n$, $\delta n \propto \nabla \cdot \vec{P}$.
- Energía: $\delta U \propto \delta n$.
- Presión: $\mathcal{P} \propto \partial U / \partial n$.
- Fuerza: $\vec{f} \propto -\nabla \mathcal{P} \propto \nabla \delta n \propto \nabla \nabla \cdot \vec{P} = -q^2 \vec{P}^L$.
- $\vec{P}^L \propto \ldots + q^2 \vec{P}^L$.
- $\epsilon^T(\omega) = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega/\tau}$.
- $\epsilon^L(\vec{q}, \omega) = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega/\tau - \beta^2 q^2}$.
- $\omega_p^2 = 4\pi n e^2 / m$.
- $\beta^2 = v_F^2/3 \to 3v_F^2/5$.

Consecuencias

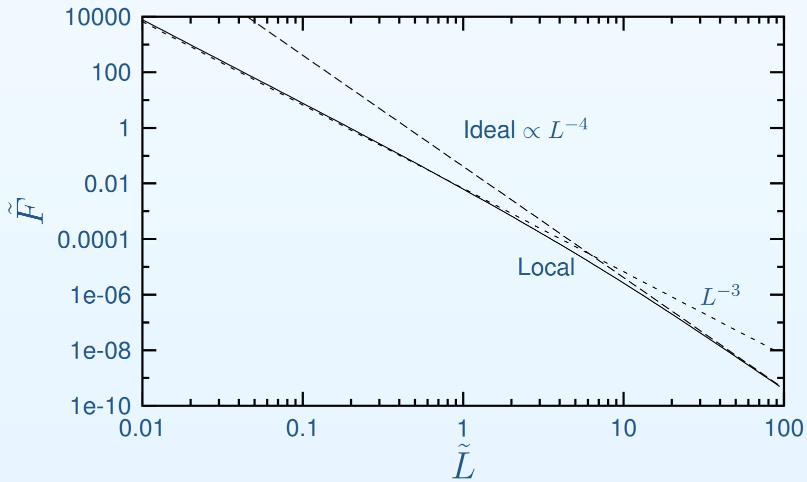
- Ondas transversales: $q^2 = \epsilon^T(w)\dfrac{\omega^2}{c^2}$.
- Ondas longitudinales: $\nabla \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \epsilon(\vec{q},\omega) = 0$,
  $q^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/\beta^2$.

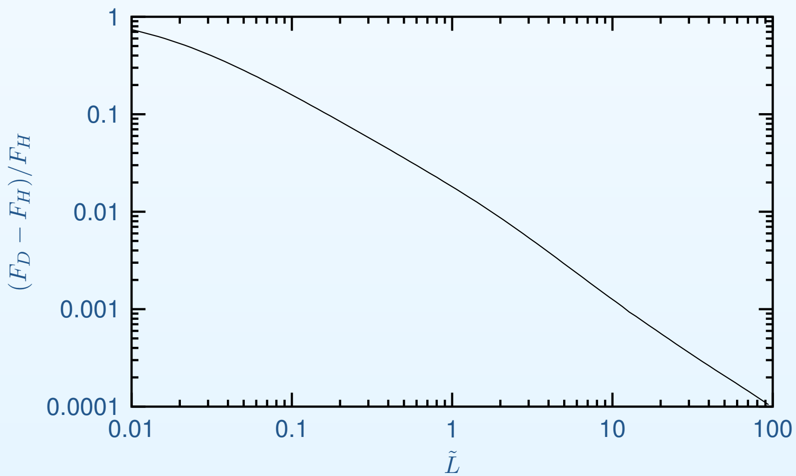


- Apantallamiento: $\kappa_{TF} = \omega_p/\beta$
- ABC's $\Rightarrow r_s,\ r_p$.

Resultados (1)

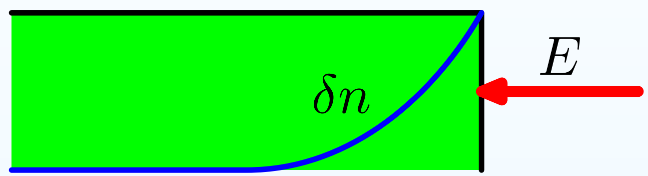
- Parámetros ajustados a Au.
- $\tilde{L} = 2\pi L/\lambda_p$.
- $\tilde{F} = (\lambda_p/2\pi)^4 F/\mathcal{A}\hbar c$.
- $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$.



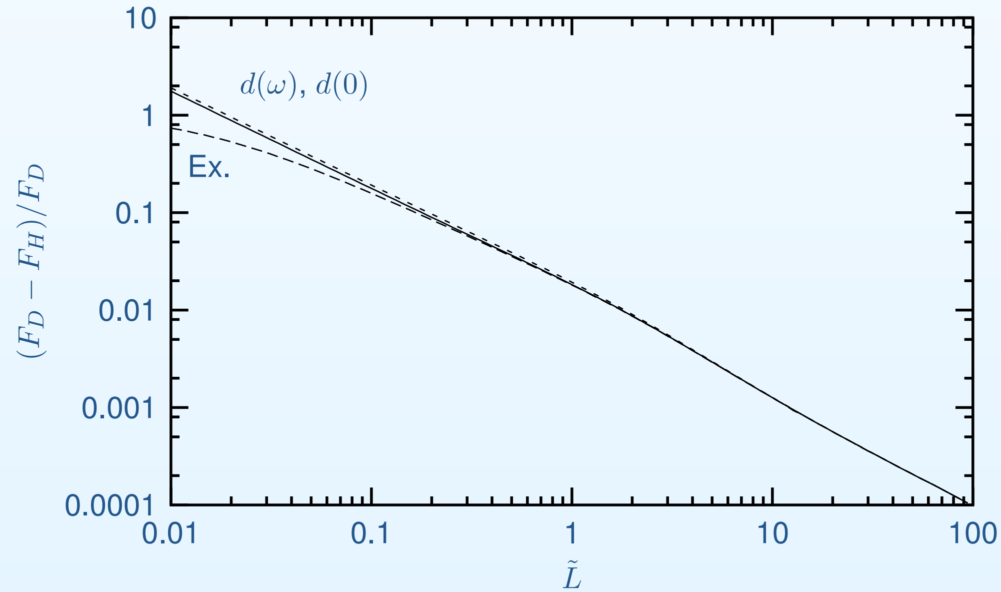


Parámetros d

- La no-localidad disminuye F. Generación de plasmones. . . o



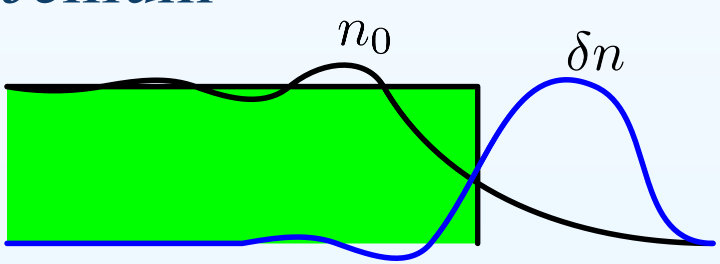
- $L_{ef} > L$, $F_H < F_D$.
- $d \equiv \dfrac{\int dz\, z\delta n}{\int \delta n}$.
- $r^p \approx r^p_D + (\ldots)d$.



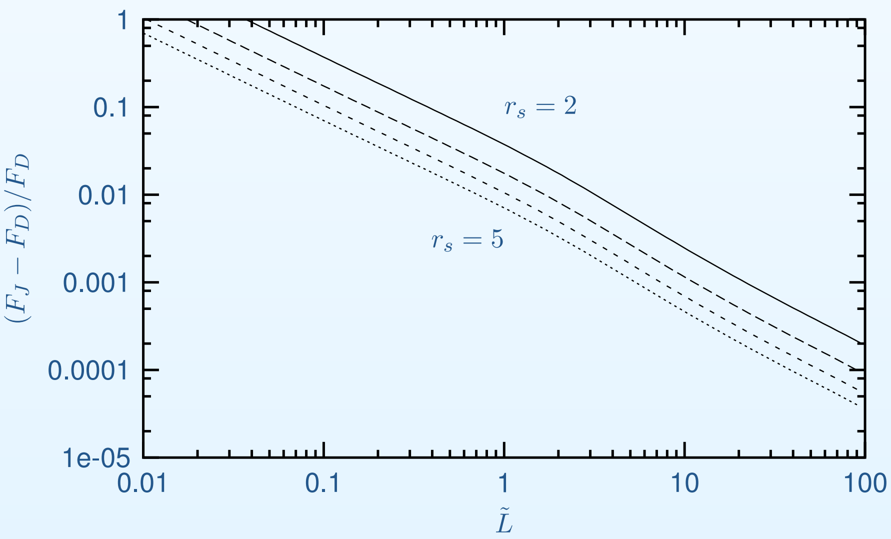
Discusión

- La corrección no local puede ser cercana al 100 %.
- d funciona para $\tilde{L} > 0{,}1$
- $d(0)$ y $d(\omega) \Rightarrow$ resultados similares.

Jellium



- El centroide de carga se desplaza hacia el vacío.
- La corrección no-local cambia de signo.



Conclusiones

- Deducción de la fórmula de Lifshitz que permite calcular la fuerza de Casimir entre materiales *arbitrarios*.
- Sistema ficticio *no-disipativo*, sin grados de libertad materiales.
- El único ingrediente del cálculo es la amplitud de reflexión de cada superficie.
- Modelo hidrodinámico simple $\Rightarrow$ cálculo exacto. La fuerza de Casimir se reduce significativamente por los efectos no locales.
- Interpretación en términos de d.
- Los valores estáticos de d dan buenos resultados...
- Calculos de *jellium* autoconsistente $\Rightarrow$ d tiene el signo contrario $\Rightarrow$ la corrección no local cambia de signo y la fuerza de Casimir aumenta.